

(II.) Integration von Regelfunktionen

Def 12.2 : $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Regelfunktion R.F.

$$: \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(a+), \varphi(b-), \varphi(x \pm) \text{ für } x \in (a, b) \\ \text{existieren in } \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\mathcal{R}([a, b]) := \{ \text{alle R.F. } [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \}$$

Bem : 1.) $\mathcal{T}([a, b]) \subsetneq \mathcal{R}([a, b])$

2.)

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \mathbb{C} \text{ stetig oder BV} \\ \varphi: [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ monoton} \end{array}$$

$$\Rightarrow \varphi \in \mathcal{R}([a, b])$$

3.) $\varphi \in \mathcal{R}([a, b]) \Rightarrow |\varphi| \in \mathcal{R}([a, b])$

$$4.) \quad f \in \mathcal{R}([a, b]) \implies$$

$$\|f\| := \sup_{[a, b]} |f| < \infty$$



$\mathcal{R}F$ sind beschränkt.



Beweis: andernfalls $\exists (x_n) \in [a, b]$ mit

$|f(x_n)| \rightarrow \infty$; Bolzano-W. $\implies \exists x \in$

$[a, b]$ und Teilfolge (x'_n) mit $x'_n \rightarrow x$.
 (nicht die gewünschten einseitigen)
 wegen $|f(x'_n)| \rightarrow \infty$ können in x
 Limiten existieren. □

Wie setzt man $\int_a^b$ von $\mathcal{I}([a, b])$
auf $\mathcal{R}([a, b])$ fort?

" durch Approximation $f_n \rightarrow f$

"

Satz 12.3

: Für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent

(i) $f \in \mathcal{R}([a, b])$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists g \in \mathcal{T}([a, b])$ mit

$$\|f - g\| < \varepsilon$$

(iii) $\exists$ eine Folge $f_n \in \mathcal{T}([a, b])$
mit $\|f - f_n\| \rightarrow 0$

Nach (iii) sind RF also gleichmäßige Limiten

von TF im Sinne von

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0,$$

speziell gilt also $f_n(y) \rightarrow f(y)$ für $y \in [a, b]$.

Bem: 1.) Die Äquivalenz (ii) $\iff$ (iii) ist klar.

2.) Aus 12.3 "(iii) $\implies$ (i)" folgt:

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Existiert
 eine Folge f_n in $\mathcal{R}([a, b])$ mit
 $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, so folgt $f \in \underline{\mathcal{R}([a, b])}$.

(denn: wähle zu f_n gemäß $(i) \Rightarrow (ii)$
 ein $g_n \in \mathcal{J}([a, b])$ mit $\|f_n - g_n\| \leq 1/n$;
 dann ist $\|f - g_n\| \leq \|f_n - g_n\| + \|f - f_n\| \rightarrow 0$,
 also $f \in \mathcal{R}([a, b])$ gemäß $(iii) \Rightarrow (i)$)

← entfällt!
Kommentare zum Beweis von Satz 12.3:

- relevant ist nur $(i) \Rightarrow (ii)$
für unsere Zwecke
- der Beweis davon für $f \in \mathcal{R}([a, b])$
benutzt ein Kompaktheitskriterium
für Teilungen von $\mathbb{R}$ ($\rightarrow$ Satz 12.2)

Satz 12.2 :

$M \subset \mathbb{R}$ kompakt (= beschränkt u. abgeschlossen)

$\iff M$ Überdeckungskompakt

(d.h.: $M \subset \bigcup_{\lambda \in A} I_\lambda$ mit offenen Intervallen

I_λ und beliebiger Indexmenge $A \implies \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $M \subset I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}$)

Bew: später u. viel allgemeiner!

→ • Beweis von (i) $\implies$ (ii) für $f \in C^0([a,b])$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben; f stetig, $[a,b]$ kompakt

$\implies \exists \delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

$\forall x, y \in [a,b], |x-y| \leq \delta$

(f gleichmäßig stetig)

Sei $Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$

mit Teilpunkten x_i , so dass

$$(*) \quad x_i - x_{i-1} \leq \delta;$$

definiere $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\varphi(x) := \begin{cases} \varphi(x_{i-1}) & \text{auf } (x_{i-1}, x_i), i=1, \dots, n \\ \varphi(x_i) & \text{in } x = x_i, i=0, \dots, n \end{cases}$$

dann gilt für $x \in [a, b]$:

$$|\varphi(x) - \varphi(x)| = 0, \text{ falls } x = x_i;$$

$$|\varphi(x) - \varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(x_{i-1})| \leq \varepsilon$$

↑
falls $x \in (x_{i-1}, x_i)$

da $0 \leq x - x_{i-1} \leq x_i - x_{i-1} \stackrel{(*)}{\leq} \delta$

$\Rightarrow \gamma \in \mathcal{J}([a, b])$ mit $\|f - \gamma\| \leq \varepsilon$.



Def. 12.3 (Regelintegral)

Sei für $f \in \mathcal{R}([a, b])$

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{h \rightarrow \infty} \int_a^b \gamma_h(x) dx,$$

wenn immer $\gamma_h \in \mathcal{J}([a, b])$ mit

$$\|f - \gamma_h\| \rightarrow 0.$$

Bem: 1.) Der Limes existiert und hängt nicht
von der speziellen Approximation ab:

$$\left| \int_a^b \gamma_n dx - \int_a^b \gamma_m dx \right| = \left| \int_a^b (\gamma_n - \gamma_m) dx \right|$$

$$\stackrel{12.1}{\leq} \|\gamma_n - \gamma_m\| (b-a) \leq \underbrace{(\|\gamma_n - f\| + \|\gamma_m - f\|)}_{\rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty} (b-a)$$

$\Rightarrow \left(\int_a^b \gamma_n dx \right)$ Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$

Sei $(\tau_m) \subset \mathcal{T}([a,b])$ mit

$$\|f - \tau_m\| \rightarrow 0 \implies$$

$$\left| \int_a^b f_n dx - \int_a^b \tau_n dx \right| \leq \|f_n - \tau_n\| (b-a)$$

$$\leq (\|f_n - f\| + \|f - \tau_n\|) (b-a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



2.)

f stetig, monoton oder BV auf $[a,b]$
 $\implies$ das Riemannintegral $\int_a^b f dx$ existiert

Aus Satz 12.1 + "Approximation" ergibt sich

Satz 12.4: (Rechenregeln für $\int_a^b$)

Seien $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$i) \int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

($\mathbb{C}$ -Linearität von $\int_a^b : \mathcal{R}([a,b]) \rightarrow \mathbb{C}$)

$$ii) \quad \left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx \leq \|f\| (b-a)$$

$$iii) \quad f, g \text{ reell}, f \leq g \Rightarrow \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$$

← überspringen

P. 428

Beweis: exemplarisch ii) und iii), i) ist trivial!

ii) Wähle $\varphi_n \in \mathcal{T}([a,b])$ mit $\|f - \varphi_n\| \rightarrow 0$.

Dann ist $|\varphi_n| \in \mathcal{T}([a,b])$ mit

$$\| |\varphi_n| - |f| \| \rightarrow 0;$$

außerdem gilt: $\|\varphi_n\| \rightarrow \|f\|$;

mit diesen Informationen geht man in

$$(\text{Satz 12.1 ii}) \quad \left| \int_a^b \varphi_n dx \right| \leq \int_a^b |\varphi_n| dx \leq \|\varphi_n\| (b-a)$$

zur Grenze $n \rightarrow \infty$ über, es folgt ii).

Frage zunächst: f reelle R.F.

? $\Rightarrow \exists$ reelle T.F. f_n mit $\|f - f_n\| \rightarrow 0$

-427-

Zu f gibt es T.F. $f_n: [a, b] \rightarrow \underline{\underline{\mathbb{C}}}$

mit $\|f - f_n\| \rightarrow 0$ (Satz 12.3);

wegen

$$\| \underbrace{\operatorname{Re} f}_{= f} - \operatorname{Re} f_n \| \leq \|f - f_n\|$$

ist $(\operatorname{Re} f_n)$ die gesuchte Folge reeller T.F.

deshalb o.E. direkt $f_n: [a, b] \rightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}}}$;

entsprechend: $\gamma_n: [a, b] \rightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ T.F.

mit $\|g - \gamma_n\| \rightarrow 0$.

Gelte $\boxed{f \leq g} \implies$

$$\tilde{f}_n := f_n - \|f - f_n\| \leq f \quad \text{und}$$

$$\tilde{\gamma}_n := \gamma_n + \|g - \gamma_n\| \geq g$$

beachte:
$$\begin{cases} \tilde{f}_n, \tilde{f}_n \text{ T.F.}, \\ \|f - \tilde{f}_n\| \rightarrow 0, \|g - \tilde{f}_n\| \rightarrow 0, \\ \tilde{f}_n \leq \tilde{f}_n \end{cases}$$

Beh. folgt mit Satz 12.1 iii). $\square$

→ Für Treppenfunktionen $\varphi: [a, \underline{c}] \rightarrow \mathbb{C}$
gilt offenbar

$$\int_a^c \varphi dx = \int_a^b \varphi dx + \int_b^c \varphi dx$$

für jede Wahl von $b \in (a, c)$, wobei
rechts das jeweilige Integral der Treppenfunktionen $\varphi|_{[a, b]}$ und $\varphi|_{[b, c]}$ steht.

Begründung: ^{weglassen} $\exists$ Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = c,$$

$$f|_{(x_{l-1}, x_l)} \equiv c_l \in \mathbb{C}$$

Fall 1 : b ein Teilpunkt $\checkmark$

Fall 2 : $b \in (x_{l-1}, x_l)$ für ein l

betrachte dann die neue Zerlegung von $[a, c]$

$$a = x_0 < \dots < x_{l-1} < b < x_l < \dots < x_n = c$$

zusammengesetzt aus den Zerlegungen

$$a = x_0 < \dots < x_{l-1} < b \quad \text{von } [a, b],$$

$$b < \dots < x_n = c \quad \text{von } [b, c].$$

Damit beweist man:

Satz 12.5 Seien $a < b < c$ aus $\mathbb{R}$,

f sei aus $\mathcal{R}([a, c])$. Dann gilt

$$\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx$$

Regelintegral von $f|_{[a, b]}$

Beweis: ^{weglassen! (p. 432)}

$f \in \mathcal{R}([a, c]) \xRightarrow{\text{Def!}}$

$\left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{R}([a, b]) \\ f \in \mathcal{R}([b, c]) \end{array} \right.$ (für die jeweiligen Einschränkungen)

$\Rightarrow \exists \gamma_n \in \mathcal{I}([a, b]), \psi_n \in \mathcal{I}([b, c])$

mit $\sup_{[a, b]} |f - \gamma_n|, \sup_{[b, c]} |f - \psi_n| \rightarrow 0$.

Setze $\rho_n : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) := \begin{cases} f_n(x), & x \in [a, b] \\ \psi_n(x), & x \in (b, c] \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_n \in \mathcal{J}([a, c]) \text{ mit } \sup_{[a, c]} |f - f_n| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \int_a^c f \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c f_n \, dx = \underline{\underline{\text{s.o.}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f_n \, dx + \int_b^c f_n \, dx \right] \stackrel{\text{Def. } f_n}{=} \underline{\underline{\text{s.o.}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b f_n \, dx + \int_b^c \psi_n \, dx \right\} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \, dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_b^c \psi_n \, dx \stackrel{\text{Def.}}{=} \underline{\underline{\text{s.o.}}}$$

$$\int_a^b f \, dx + \int_b^c f \, dx.$$



Notation : 1.) $\int_a^a f dx := 0$

-432-

2.) $a < b, f \in \mathcal{R}([a, b])$: $\int_b^a f dx := - \int_a^b f dx$

Rechne mit Satz 12.5 nach:

$$\left\{ \int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx \right.$$

unabhängig von der Lage von a, b, c

Wir geben noch eine Anwendung der Monotonie des Integrals

Satz 12.6 : Seien $a < b$ und

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f \geq 0$.

Gilt dann $\int_a^b f dx = 0$, so

folgt $f \equiv 0$.

Bem: der Schluss ist falsch

für $f \in \mathcal{R}([a, b])$, z. B.

$$f(x) := \begin{cases} 0, & a \leq x < b \\ 1, & x = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f dx = 0, \text{ aber } f \neq 0!$$

Bew: indirekt! Sei etwa $x_0 \in (a, b)$

mit $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ mit
 f stetig

$f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$ auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; setze

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} f(x_0) & \text{auf } (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g \in \mathcal{I}([a, b]) \text{ mit } g \leq f$$

$$\Rightarrow \int_a^b f dx \geq \int_a^b g dx = \frac{1}{2} f(x_0) 2\delta > 0,$$

Wspr!

